# III. országos magyar matematikaolimpia
# XXX. EMMV
**megyei szakasz, 2020. január 18.**

## IX. osztály

**1. feladat.** Adott egy négyzet, amely egységnyi négyzetekre van felosztva. A bal felső sarkából kiindulva az első sor és az első oszlop mindegyik négyzetébe írjuk az 1 számot, majd a második sor és második oszlop mindegyik négyzetébe a 2 számot, felülírva az eredetileg már létező számokat. Az eljárást folytatjuk, amíg minden sor és minden oszlop négyzetei kitöltődnek valamelyik számmal. Hány egység a négyzet oldala, ha a benne levő számok összege 372?

*Zajzon Csaba, Barót*

*Megoldás.* A táblázatban a számok elrendezése az alábbi:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | $\dots$ | $n$ |
| 2 | 2 | 3 | $\dots$ | $n$ |
| 3 | 3 | 3 | $\dots$ | $n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n$ | $n$ | $\dots$ | $n$ |

(**3 pont**)

Legyen $S$ a négyzethálóban lévő számok összege és $n$ a négyzet oldalának hossza. Ekkor

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + \dots + (2n-1) \cdot n \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - k) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Azt kaptuk, hogy $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = 372$, vagyis $n(n+1)(4n-1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 31$, ahonnan $n = 8$. Tehát a négyzet oldalának hossza 8 egység. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

**2. feladat.**

a) Igazold, hogy $(x+2)(x^2-6x+16) \geq 32$, bármely $x \in [0, \infty)$ esetén.

b) Ha $x, y, z \in [0, \infty)$ és $x + y + z = 6$, bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{x^2-6x+16} + \frac{1}{y^2-6y+16} + \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{3}{8}.$$

*Matlap*

*Megoldás.* Mivel

$$(x+2)(x^2-6x+16) = x^3 - 4x^2 + 4x + 32 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= x(x-2)^2 + 32 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

ezért ha $x \geq 0$, akkor $x(x-2)^2 \geq 0$ és így

$$(x+2)(x^2-6x+16) = x(x-2)^2 + 32 \geq 32. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b) Ha $x \geq 0$, akkor $x+2 > 0$. **(1 pont)**
Az a) alpont alapján

$$x^2 - 6x + 16 \geq \frac{32}{x+2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x^2-6x+16} \leq \frac{x+2}{32}.$$

Hasonlóan

$$\frac{1}{y^2-6y+16} \leq \frac{y+2}{32} \quad \text{és} \quad \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{z+2}{32}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Összeadva a kapott egyenlőtlenségeket és felhasználva, hogy $x+y+z=6$, kapjuk hogy

$$\frac{1}{x^2-6x+16} + \frac{1}{y^2-6y+16} + \frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{x+y+z+6}{32} = \frac{6+6}{32} = \frac{3}{8},$$

ha $x, y, z \in [0, \infty)$ és $x+y+z=6$. **(2 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■

**3. feladat.** Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:
a) $x + ([x]-2020)^{2020} = [x]$;
b) $x^2 - 6[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 9$.

*Turdean Katalin, Zilah*

*Megoldás.* a) Tudjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, $[x] \in \mathbb{Z}$, innen következik, hogy $([x]-2020)^{2020} \in \mathbb{Z}$, ahonnan figyelembe véve az egyenlőséget következik, hogy $x \in \mathbb{Z}$, ezért $[x] = x$. **(2 pont)**

Ennek alapján az egyenlet a következőképpen alakul:

$$x + (x-2020)^{2020} = x \quad \Longleftrightarrow \quad (x-2020)^{2020} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2020. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Használva az $[x] = a \in \mathbb{Z}$ és $\{x\} = b \in [0,1)$ jelöléseket az egyenlet a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - 6ab + 3b^2 &= 9 \\ a^2 - 4ab + 4b^2 &= 9 \\ (a-2b)^2 &= 9 \\ a - 2b &= \pm 3. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

I. eset. Ha $a - 2b = 3$, akkor $a - 3 = 2b$ és mivel $a - 3 \in \mathbb{Z}$, ezért $2b \in \mathbb{Z}$. Másrészt $b \in [0,1)$, így $2b \in [0,2)$, vagyis $2b \in \{0,1\}$, ahonnan $b \in \{0, \frac{1}{2}\}$.
Ha $b = 0$, akkor $a = 3$, tehát $x = a + b = 3$.
Ha $b = \frac{1}{2}$, akkor $a = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$, tehát $x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. **(2 pont)**

II. eset. Ha $a - 2b = -3$, akkor $a + 3 = 2b$ és mivel $a + 3 \in \mathbb{Z}$, ezért $2b \in \mathbb{Z}$. Másrészt $b \in [0,1)$, így $2b \in [0,2)$, vagyis $2b \in \{0,1\}$, ahonnan $b \in \{0, \frac{1}{2}\}$.
Ha $b = 0$, akkor $a = -3$, tehát $x = -3$.

Ha $b = \frac{1}{2}$, akkor $a = -3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2$, tehát $x = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

$$M = \left\{3, \frac{9}{2}, -3, -\frac{3}{2}\right\}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Hivatalból **(1 pont)**

■

**4. feladat.** Az $O$ középpontú, $R$ sugarú körbe írt $M_1M_2M_3M_4$ négyszög esetén teljesül az

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{0}$$

feltétel.

a) Milyen négyszög az $M_1M_2M_3M_4$?

b) Tudva, hogy $M_1M_2M_3M_4$ téglalap, igazold, hogy

$$|\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_3}|^2 + |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_4}|^2 + |\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_3}|^2 + \\ + |\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_4}|^2 + |\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4}|^2 = 16R^2.$$

*Tóth Csongor, Szováta*
*Betuker Enikő, Margitta*

*Megoldás.* Legyen $P_1$ az $M_1M_2$ szakasz felezőpontja, $P_2$ pedig az $M_3M_4$ szakasz felezőpontja. Ekkor

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}{2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OP_2} = \frac{\overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Figyelembe véve a $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{0}$ összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = -(\overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}).$$

Innen $\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OP_2}$, vagyis $O$, $P_1$, $P_2$ kollineárisak és $OP_1 = OP_2$ **(2 pont)**

Az $OM_1M_2$ egyenlő szárú háromszögben $OP_1$ oldalfelező, így $OP_1 \perp M_1M_2$. Hasonlóan $OP_2 \perp M_3M_4$. Következik, hogy $M_1M_2 \parallel M_3M_4$. **(1 pont)**

A $P_1OM_1$ és $P_2OM_3$ háromszögben

$$OP_1 = OP_2, \quad OM_1 = OM_3, \quad \widehat{P_1} \equiv \widehat{P_2},$$

így $P_1M_1 = P_2M_3$. Tehát $M_1M_2 = M_3M_4$. **(2 pont)**

Mivel $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ és $M_1M_2 = M_3M_4$ ezért $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramma, és mivel $M_1M_2M_3M_4$ körbeírt négyszög, ezért $M_1M_2M_3M_4$ téglalap. **(1 pont)**

b) A következőket írhatjuk:

$$|\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}|^2 = |\overrightarrow{M_2M_1}|^2 = M_2M_1^2$$

$$\vdots$$

$$|\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_4}|^2 = |\overrightarrow{M_4M_3}|^2 = M_4M_3^2$$

Összeadva az egyenlőségeket és figyelembe véve, hogy $M_1M_2M_3M_4$ téglalap kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} S &= M_2M_1^2 + M_3M_1^2 + M_4M_1^2 + M_3M_2^2 + M_4M_2^2 + M_4M_3^2 \\ &= (M_2M_1^2 + M_4M_1^2) + (M_3M_2^2 + M_4M_3^2) + M_3M_1^2 + M_4M_2^2 \\ &= M_4M_2^2 + M_4M_2^2 + M_3M_1^2 + M_4M_2^2 \\ &= 4 \cdot 4R^2 = 16R^2 \end{aligned}$$

**(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■